Examen HAVO

2007

tijdvak 1
woensdag 30 mei
13.30 - 16.30 uur

wiskunde B1,2

Bij dit examen hoort een uitwerkbijlage.

Dit examen bestaat uit 19 vragen.
Voor dit examen zijn maximaal 84 punten te behalen.
Voor elk vraagnummer staat hoeveel punten met een goed antwoord behaald kunnen worden.

Als bij een vraag een verklaring, uitleg of berekening vereist is, worden aan het antwoord meestal geen punten toegekend als deze verklaring, uitleg of berekening ontbreekt.

Geef niet meer antwoorden (redenen, voorbeelden e.d.) dan er worden gevraagd. Als er bijvoorbeeld twee redenen worden gevraagd en je geeft meer dan twee redenen, dan worden alleen de eerste twee in de beoordeling meegeteld.

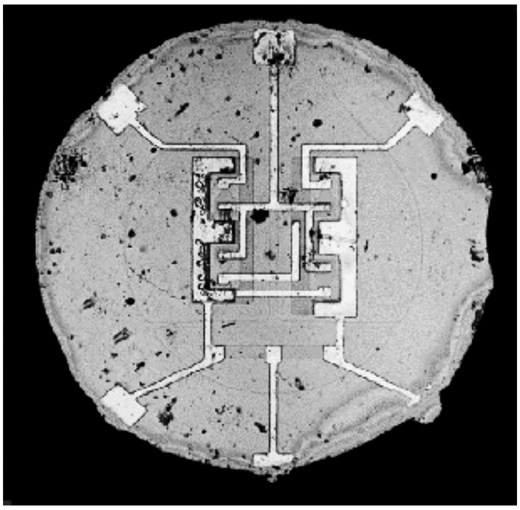
700023-1-054o

Beschikbaar gesteld door ExamentrainingExact. Voor alle oude eindexamens zie www.oudeexamens.nl

De wet van Moore

Eén van de belangrijkste onderdelen van de computer is de chip. Een chip is een elektronische schakeling die uit vele duizenden transistors bestaat. Toch is een chip niet groter dan een paar vierkante millimeter.

foto



In 1961 maakte men de eerste experimentele chip, bestaande uit 4 transistors. Deze chip zie je sterk vergroot in de foto hierboven. Gordon Moore was een van de mensen die bij het ontwerp van de chip betrokken waren. In 1965 voorspelde hij dat het aantal transistors per chip exponentieel zou gaan groeien. Deze voorspelling werd bekend als de wet van Moore.

Tot nu toe is gebleken dat er per twee jaar ongeveer een verdubbeling van het aantal transistors op één chip optreedt. De formule voor de wet van Moore die hierbij hoort, is:

$A = 4 \cdot 2^{\frac{1}{2}t}$

Hierin is A het aantal transistors op één chip en t het aantal jaren vanaf 1961.

3p **1** Bereken uit hoeveel transistors één chip in 1975 volgens deze formule bestond.

Beschikbaar gesteld door ExamentrainingExact. Voor alle oude eindexamens zie www.oudeexamens.nl

In 1968 was Moore een van de oprichters van het bedrijf Intel dat vooral bekend werd door een speciaal soort chip: de processor. De eerste Intel-processor werd gemaakt in 1971. Hij bestond uit ongeveer 2250 transistors.
Men neemt aan dat het aantal transistors van één processor ook elke twee jaar verdubbelt. De formule die hierbij hoort, is:

$$P = 2250 \cdot 2^{\frac{1}{2}t}$$

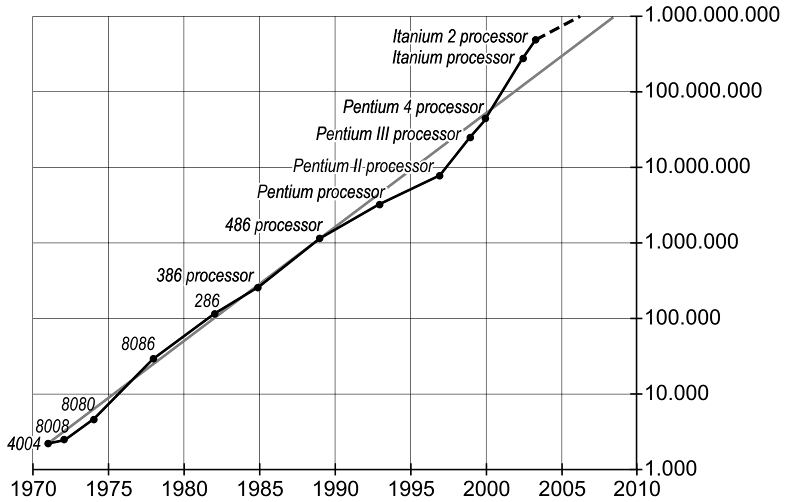
Hierin is P het aantal transistors van de processor en t het aantal jaren vanaf 1971.

Veronderstel dat de formules voor A (het aantal transistors per chip) en P (het aantal transistors per processor) onbeperkt blijven gelden.

6p **2** Bereken het aantal jaren verschil tussen de momenten waarop A en P de grens van een miljard (10^9) overschrijden.

In onderstaande figuur zie je vanaf 1971 de jaren en de aantallen transistors van de verschillende processors die Intel gemaakt heeft tot het jaar 2003, bijvoorbeeld de 4004-processor, de 8008-processor en de Pentium-processors. Merk op dat de stapgrootte op de verticale as steeds groeit met een factor 10. Men heeft de logaritme van het aantal transistors uitgezet tegen het jaar waarin de processor werd gemaakt. Op de schaalverdeling staan echter wel de oorspronkelijke aantallen weergegeven.

figuur



De lichtgrijze lijn in deze figuur hoort bij de eerder genoemde formule voor P. Deze lijn begint met de 2250 transistors van de 4004-processor. Bij deze rechte lijn hoort een formule van de vorm $\log(P) = a \cdot t + b$. Je kunt deze formule vinden door uit te gaan van de formule $P = 2250 \cdot 2^{\frac{1}{2}t}$.

4p **3** Bereken de waarden van a en b door de laatste formule te herleiden. Rond af op twee decimalen.

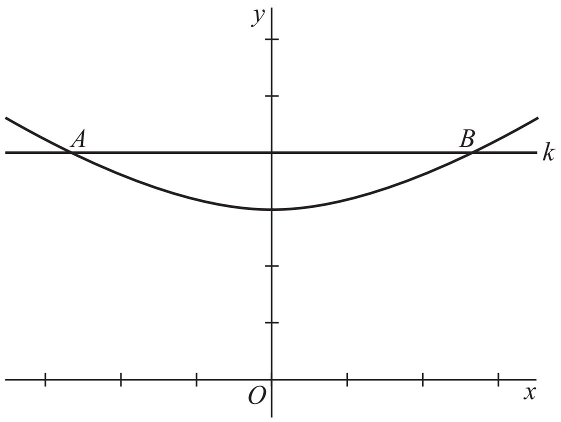
Beschikbaar gesteld door ExamentrainingExact. Voor alle oude eindexamens zie www.oudeexamens.nl

Wortelfuncties

Een functie f is gegeven door $f(x)=\sqrt{x^2+9}$.
In de figuur is de grafiek van f afgebeeld.

De lijn k met vergelijking $y=4$ snijdt de grafiek van f in de punten A en B.

figuur



4p **4** Bereken de exacte lengte van lijnstuk AB.

Vervolgens bekijken we de functie g die is gegeven door $g(x)=5-\sqrt{x^2+9}$.

De grafiek van g kan door twee achtereenvolgende transformaties ontstaan uit de grafiek van f.

4p **5** Geef aan welke twee transformaties op de grafiek van f kunnen worden toegepast, en in welke volgorde, om de grafiek van g te laten ontstaan.

De grafiek van g snijdt de negatieve x-as in het punt P met $x_P=-4$.
De raaklijn in P aan de grafiek van g snijdt de y-as in punt S.

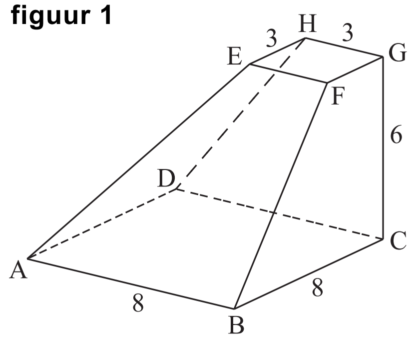
5p **6** Bereken met behulp van differentiëren de coördinaten van het punt S.

Beschikbaar gesteld door ExamentrainingExact. Voor alle oude eindexamens zie www.oudeexamens.nl

Afgeknotte piramide

Van een afgeknotte piramide $ABCD.EFGH$ zijn het grondvlak en bovenvlak vierkanten. Het grondvlak heeft zijden van 8 cm en het bovenvlak heeft zijden van 3 cm. De ribbe CG staat loodrecht op het grondvlak en heeft een lengte van 6 cm. Zie figuur 1.

figuur 1



4p **7** Bereken de hoek die AE met het grondvlak $ABCD$ maakt.

Op de uitwerkbijlage is op schaal 1 : 2 een begin gemaakt met een uitslag van deze afgeknotte piramide.

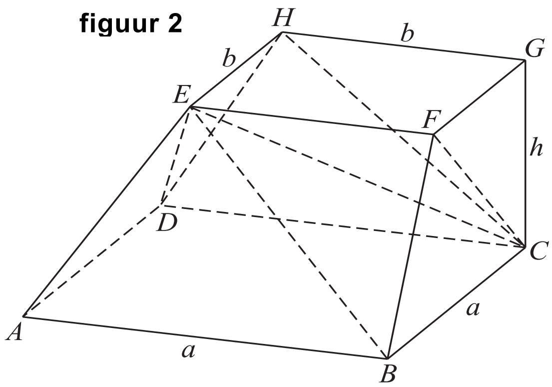
5p **8** Maak deze uitslag af. Zet alle letters er op de juiste plek bij.

Egyptische wiskundigen hebben zich in de oudheid al bezig gehouden met inhoudsformules van piramides en afgeknotte piramides. Voor de inhoud van een afgeknotte piramide met vierkant grondvlak en bovenvlak vonden zij de volgende formule:

$I = \frac{1}{3}ha^2 + \frac{1}{3}hb^2 + \frac{1}{3}hab$

Hierin is:
a de lengte van de zijde van het grondvlak;
b de lengte van de zijde van het bovenvlak;
h de hoogte van de afgeknotte piramide.

figuur 2



Voor de volgende vraag bekijken we zo'n afgeknotte piramide $ABCD.EFGH$ waarvan ribbe CG loodrecht op het grondvlak staat. Zie figuur 2.
$ABCD$ is een vierkant met zijde a en $EFGH$ is een vierkant met zijde b.
De afgeknotte piramide is opgedeeld in de volgende vier piramides: $E.ABCD$, $C.EFGH$, $E.BCF$ en $E.HDC$.

5p **9** Leid de formule van de Egyptenaren af met behulp van de inhoud van deze vier piramides.

Beschikbaar gesteld door ExamentrainingExact. Voor alle oude eindexamens zie www.oudeexamens.nl

Mobiele telefoon

Een mobiele telefoon werkt op een batterij. Zo'n telefoon kan vrij lang aanstaan als je niet belt. De maximale tijd dat de mobiele telefoon aan kan staan zonder gebruikt te worden, heet de stand-by-tijd. Als je wel belt, verbruikt de telefoon meer energie. De batterij is dan sneller leeg.

figuur

Bij een telefoon op stand-by-stand met een moderne batterij wordt het spanningsverloop benaderd door de formule $V = 3{,}31 + \dfrac{21}{t - 148}$.
Hierin is V de spanning van de batterij in Volt en t de tijd in uur.
Op tijdstip $t = 0$ is de batterij vol.

De telefoon staat vanaf het ogenblik waarop de batterij net helemaal is opgeladen stand-by totdat de spanning tot 0 is gedaald. In minuten nauwkeurig is deze stand-by-tijd gelijk aan 141 uur en 39 minuten.

3p **10** Laat dit met een berekening zien.

Beschikbaar gesteld door ExamentrainingExact. Voor alle oude eindexamens zie www.oudeexamens.nl

De spanning die de batterij levert, kun je aan de rechterkant van het scherm aflezen. Als de batterij vol is, staan alle blokjes (nummers 1 t/m 4) aan. Zie de figuur.
Bij een volle batterij bedraagt de spanning ongeveer 3,2 Volt.
Het aantal zichtbare blokjes wordt bepaald door het percentage van de maximale spanning. Als het percentage minder dan 75% bedraagt, kan er niet meer getelefoneerd worden en zijn alle blokjes uit. Zie onderstaande tabel.

tabel

blokjes die zichtbaar zijn	percentage van de maximale spanning
1, 2, 3, 4	100 – 97
2, 3, 4	97 – 94
3, 4	94 – 88
4	88 – 75
geen	75 – 0

Iemand laadt de batterij helemaal op. Vervolgens legt hij de telefoon in de stand-by-stand weg. De telefoon wordt niet gebruikt. Na verloop van tijd gaat blokje nummer 1 uit. Een tijd nadat blokje nummer 1 is uitgegaan, gaat blokje nummer 2 uit. Juist op dat moment pakt hij de telefoon, ziet blokje nummer 2 uitgaan en denkt dat de telefoon op de helft van zijn stand-by-tijd is. Er zijn dan immers nog twee blokjes (nummers 3 en 4) van de vier zichtbaar.

5p **11** Onderzoek met behulp van de gegeven formule of de telefoon op het moment dat blokje nummer 2 uitgaat, op de helft van zijn stand-by-tijd is.

Bij een ouderwetse batterij neemt de spanning als de telefoon stand-by staat lineair met de tijd af volgens de formule $V = -0{,}01 \cdot t + 3{,}2$.
In deze formule is V de spanning van de batterij in Volt en t de tijd in uur.

Als de telefoon stand-by staat, ontlaadt de ouderwetse batterij de hele tijd met dezelfde snelheid. Bij de moderne batterij hangt deze snelheid van ontladen af van het moment. De formule die het spanningsverloop benadert van een moderne batterij die stand-by staat, kan ook geschreven worden als $V = 3{,}31 + 21 \cdot (t - 148)^{-1}$.

5p **12** Bereken met behulp van differentiëren het tijdstip waarop de moderne batterij even snel ontlaadt als de oude als de telefoon stand-by staat. Rond het antwoord af op hele uren.

Beschikbaar gesteld door ExamentrainingExact. Voor alle oude eindexamens zie www.oudeexamens.nl

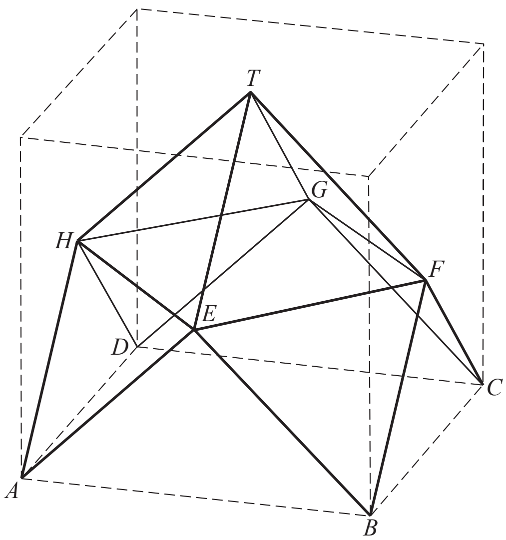
Klimtoestel

Op de foto zie je een klimtoestel. Dit toestel is opgebouwd uit 16 buizen en 9 metalen bollen. In het verdere verloop van deze opgave worden de bollen als punten voorgesteld en de buizen als rechte lijnstukken.

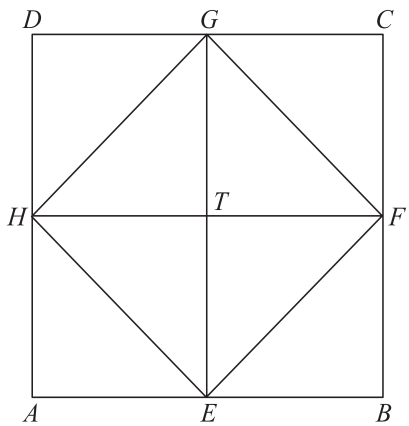
foto

In figuur 1 is het klimtoestel in een denkbeeldige kubus geplaatst met grondvlak $ABCD$.
De punten E, F, G en H zijn snijpunten van de zijvlaksdiagonalen.
T is het snijpunt van de diagonalen in het bovenvlak.
In figuur 2 is een bovenaanzicht (verkleind) van het klimtoestel weergegeven.

figuur 1



figuur 2



4p **13** Teken op de uitwerkbijlage een aanzicht van het klimtoestel, waarbij de kijkrichting evenwijdig is met EG. Zet alle letters er op de juiste plek bij.

Elke buis in het klimtoestel is 3 meter lang.

4p **14** Laat met een berekening zien dat de hoogte van het klimtoestel ongeveer 4,24 meter is.

Beschikbaar gesteld door ExamentrainingExact. Voor alle oude eindexamens zie www.oudeexamens.nl

Sommige buizen van het klimtoestel zijn evenwijdig met buis HT, andere snijden HT, en er zijn buizen die buis HT kruisen.

3p **15** Noem alle buizen die buis HT kruisen.

Het klimtoestel wordt met behulp van driehoekige platen die aan de buizen worden bevestigd, omgebouwd tot een speelhuisje. De hoogte van het huisje is ongeveer 4,24 meter.

5p **16** Bereken de inhoud van het speelhuisje $T.EFGH.ABCD.$ Geef je antwoord in gehele m^3.

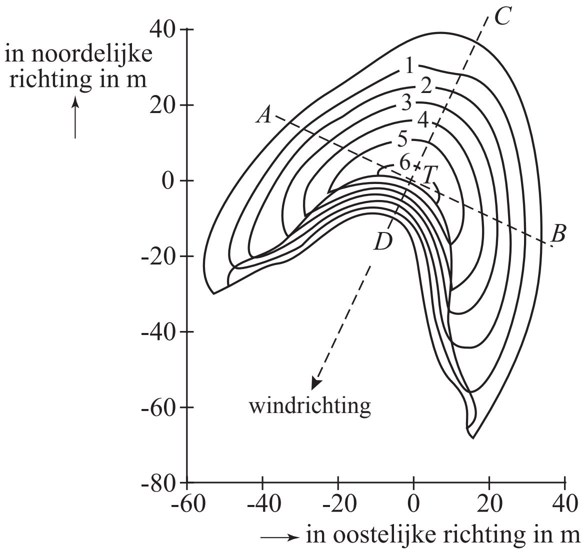
Beschikbaar gesteld door ExamentrainingExact. Voor alle oude eindexamens zie www.oudeexamens.nl

Wandelende duinen

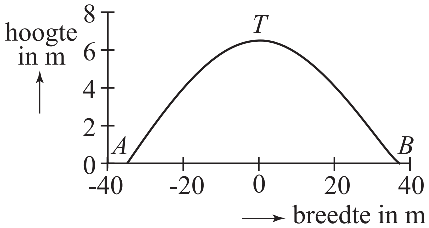
Bij de stad Laâyoune in Zuid-Marokko bevindt zich in de woestijn een duingebied. De duinen hebben van bovenaf gezien de vorm van een halve maan. Zo'n halve maan ontstaat als de windrichting het hele jaar constant is en er niet voldoende zand aanwezig is voor de vorming van complete duinen. Zie de foto hieronder.

foto

figuur 1



figuur 2



Wetenschappers hebben van het duin links voor op de foto de afmetingen precies opgemeten. Met hun metingen maakten zij de tekening van figuur 1.

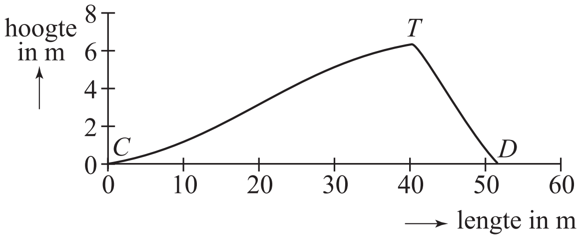
In figuur 2 is een dwarsdoorsnede getekend van het duin van figuur 1 langs de lijn AB. Langs de horizontale as is de afstand x tot het midden uitgezet en langs de verticale as de hoogte h van het duin. Links van het midden (richting A) wordt de afstand x negatief gerekend.
De vorm van deze doorsnede van het duin wordt benaderd met een deel van een cosinuskromme. Het hoogste punt van het duin, T, (boven het snijpunt van lijn AB en lijn CD) is ongeveer 6,37 meter hoog. Bij benadering geldt nu:
$h = 6{,}37 \cdot \cos(b \cdot x)$ met h en x in meter.

4p **17** Bereken met behulp van figuur 2 de waarde van b in deze formule.
Rond af op drie decimalen.

Beschikbaar gesteld door ExamentrainingExact. Voor alle oude eindexamens zie www.oudeexamens.nl

De doorsnede van het duin van figuur 1 langs lijn CD is in figuur 3 getekend.

figuur 3



In deze opgave benaderen we de doorsnede met een eenvoudig model. Hierin is h de hoogte in meter en is x de afstand in meter langs de lijn CD gemeten vanaf punt C.

De doorsnede in figuur 3 bestaat uit twee delen. Voor het linker gebogen deel gebruiken we een deel van een cosinusgrafiek. De formule die hierbij hoort, wordt gegeven door: $h(x) = 3{,}25 - 3{,}25\cos(\frac{\pi}{45}x)$.

Het rechterdeel na de top van het duin, dat ligt tussen de punten (41; 6,37) en (52; 0), benaderen we met het lijnstuk dat die punten verbindt. De formule die hierbij hoort, is van de vorm $h(x) = ax + b$. Door berekening blijkt dat $a \approx -0{,}58$ en $b \approx 30{,}11$.

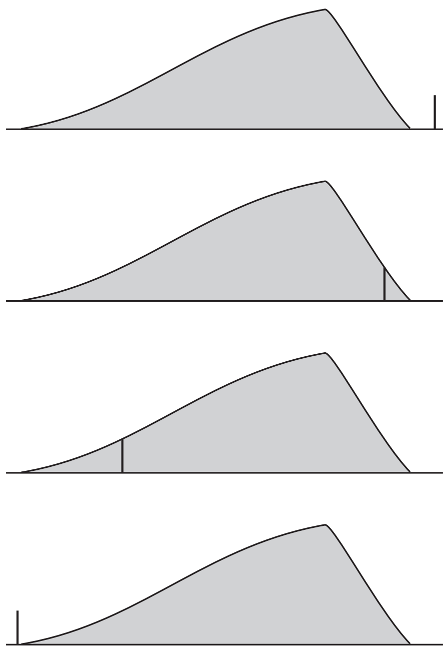
4p **18** Toon dit met een berekening aan.

De windrichting (van C naar D) is bijna het hele jaar door gelijk en is in figuur 1 aangegeven door de richting van de pijl. Door de wind verplaatsen de duinen zich, waarbij de vorm vrijwel gelijk blijft. Bij het duin van figuur 3 gebeurt dat met een snelheid van 65 meter per jaar.

Midden op het pad van het ‘wandelende’ duin staat een paal van 2 meter hoog. Het duin zal over de paal heen gaan, waardoor de paal gedurende een tijd onder het zand verborgen zal zijn. Zie figuur 4.

7p **19** Bereken met behulp van de formules voor $h(x)$ hoe lang de paal onder het zand verdwenen zal zijn. Rond je antwoord af op hele maanden.

figuur 4



Beschikbaar gesteld door ExamentrainingExact. Voor alle oude eindexamens zie www.oudeexamens.nl