

Examen VWO 2007

tijdvak 2
woensdag 20 juni
13.30 - 16.30 uur

wiskunde A1,2

Bij dit examen hoort een uitwerkbijlage.

Dit examen bestaat uit 20 vragen.

Voor dit examen zijn maximaal 85 punten te behalen.

Voor elk vraagnummer staat hoeveel punten met een goed antwoord behaald kunnen worden.

Als bij een vraag een verklaring, uitleg of berekening vereist is, worden aan het antwoord meestal geen punten toegekend als deze verklaring, uitleg of berekening ontbreekt.

Geef niet meer antwoorden (redenen, voorbeelden e.d.) dan er worden gevraagd. Als er bijvoorbeeld twee redenen worden gevraagd en je geeft meer dan twee redenen, dan worden alleen de eerste twee in de beoordeling meegeteld.

Vakanties

In het najaar van 2003 is een enquête gehouden onder 3000 Nederlanders waarin gevraagd werd op welke wijze zij hun vakantie hadden geboekt in de jaren 2002 en 2003. Men onderscheidde daarbij drie mogelijkheden:

- boeken via reisbureau;
- boeken via internet;
- boeken op een andere manier.

In tabel 1 zijn enkele resultaten uit deze enquête weergegeven.

tabel 1

Vakantieboekingen

manier van boeken in 2002	aantal boekingen in 2002	overgangpercentages naar manier van boeken in 2003		
		reisbureau	internet	anders
reisbureau	1200	70%	24%	6%
internet	940	5%	90%	5%
anders	860	20%	30%	50%

Uit de tabel kun je bijvoorbeeld aflezen dat 24% van de mensen die in 2002 hun vakantie via een reisbureau hadden geboekt, dit in 2003 via internet deden. En ook dat 90% van de mensen die in 2002 via internet hadden geboekt, dit in 2003 weer deden.

Het aantal geënquêteerden dat via internet de vakantie had geboekt, was in 2003 groter dan in 2002.

- 4p **1** Bereken met hoeveel procent dit aantal was toegenomen.

Niet alleen bij de 3000 geënquêteerden nam het aantal internetboekingen toe, ook landelijk was dit het geval. Uit het onderzoek 'Consumer's Choice of Channels' van Deloitte bleek namelijk dat in 2004 in Nederland de helft van alle reizen via internet was geboekt. In 2003 was dit nog maar 35%.

Mede op grond van deze uitkomsten heeft men een formule opgesteld, die het percentage internetboekingen goed benadert. Deze formule ziet er als volgt uit:

$$P(t) = \frac{222}{3 + 43 \cdot (0,43)^t}$$

In deze formule is t in jaren, waarbij $t = 0$ correspondeert met het jaar 2000. P is het percentage van alle vakanties dat in dat jaar is geboekt via internet.

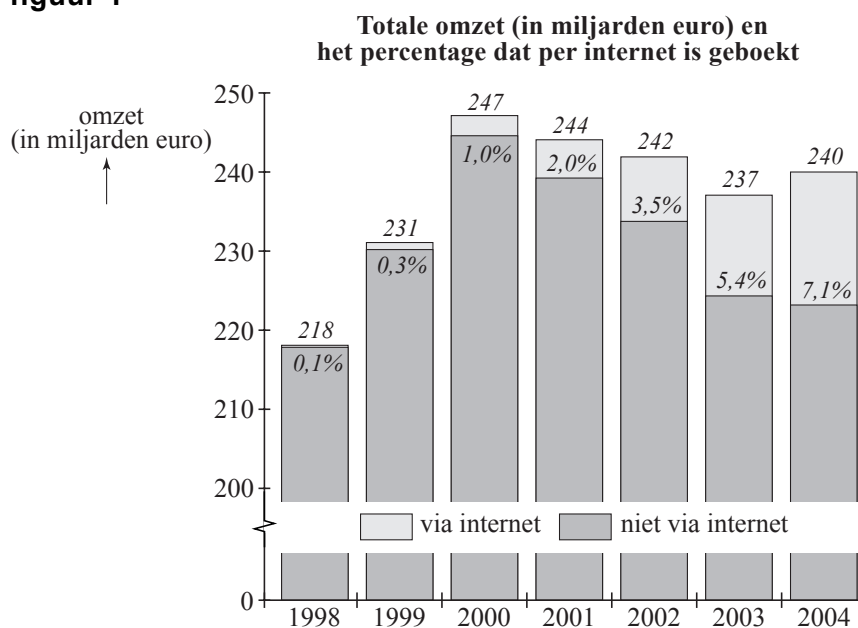
- 3p **2** Onderzoek hoeveel procent van de vakanties volgens de formule voor P op den duur via internet zal worden geboekt.

Uit het onderzoek werd de conclusie getrokken dat het percentage internetboekingen in de loop van de jaren steeds verder zal toenemen. De formule van P moet dus een stijgende grafiek opleveren. Dat kunnen we controleren met behulp van de afgeleide van P .

- 4p **3** Stel een formule op voor de afgeleide van P en toon met behulp daarvan aan dat de grafiek van P stijgend is.

Niet alleen in Nederland is onderzoek gedaan naar de manier waarop een vakantie wordt geboekt. Uit een ander onderzoek is onderstaande figuur 1 afkomstig. Deze figuur heeft betrekking op de totale omzet van de Europese reisindustrie.

figuur 1



In de figuur kun je de jaarlijkse omzet van de totale Europese reisindustrie aflezen voor de jaren 1998 tot en met 2004. Zo zie je bijvoorbeeld dat in het jaar 2000 de omzet 247 miljard euro was, waarvan 1,0% afkomstig was van boekingen via internet.

Met behulp van figuur 1 kunnen we voor 2001, 2002, 2003 en 2004 de omzet berekenen van de reizen die geboekt zijn via internet. Die omzet is ieder jaar toegenomen.

- 5p **4** Laat zien dat deze omzet in de periode 2001-2004 niet exponentieel is toegenomen.

Kangoeroe

Veel middelbare scholen doen jaarlijks mee aan de Europese Kangoeroe reken- en wiskundewedstrijd. Deze wedstrijd dankt zijn naam aan zijn Australische oorsprong.



Tijdens de wedstrijd krijgen de leerlingen 30 vragen voorgelegd. Bij elke vraag worden 5 mogelijke antwoorden gegeven, waarvan er precies één goed is. Elke goed beantwoorde vraag levert punten op, maar een fout antwoord levert strafpunten op. Het aantal punten en strafpunten hangt af van het nummer van de vraag; de vragen zijn daarbij in 3 groepen verdeeld.

- de vragen 1 tot en met 10 leveren 3 punten per goed antwoord op en $\frac{3}{4}$ strafpunt per fout antwoord;
- de vragen 11 tot en met 20 leveren 4 punten per goed antwoord op en 1 strafpunt per fout antwoord;
- de vragen 21 tot en met 30 leveren 5 punten per goed antwoord op en $1\frac{1}{4}$ strafpunt per fout antwoord.

Per vraag mag je slechts één antwoord kiezen. Als je geen antwoord invult, krijg je geen punten, maar ook geen strafpunten voor die vraag.

Wieke vraagt zich af of het niet beter is om een vraag waarvan je het antwoord niet weet, onbeantwoord te laten. Je kunt dan weliswaar geen punten verdienen, maar je krijgt in elk geval ook geen strafpunten.

Wieke berekent dat bij gokken de verwachtingswaarde van het aantal punten bij de vragen 1 tot en met 10 gelijk is aan 0. Het maakt dus bij deze vragen niet uit of je gokt of geen antwoord invult.

- 4p **5** Onderzoek hoe dat zit bij de andere vragen door de verwachtingswaarde van het aantal punten bij gokken te berekenen bij een van de vragen 11 tot en met 20 en bij een van de vragen 21 tot en met 30.

Naast de genoemde punten en strafpunten krijgt elke deelnemende leerling 30 punten om mee te beginnen. Wanneer je hier de behaalde punten bij optelt en de strafpunten er van aftrekt, krijg je de **eindscore**.

We gaan onderzoeken wat er kan gebeuren met de eindscore van een leerling die bij elke vraag willekeurig een antwoord invult en geen vragen open laat. In de tabel op de uitwerkbijlage staan de kansen op verschillende eindscores. Daarnaast staan ook de cumulatieve kansen. De kans dat een leerling die alle antwoorden gokt een eindscore van bijvoorbeeld 40 punten haalt, is gelijk aan 0,02744. De kans op een eindscore van 40 punten of minder is 0,82869.

In de tabel kun je zien dat een eindscore van 0 punten wel mogelijk is, maar een eindscore van 1,25 of 2,5 punten niet.

4p **6** Leg uit waarom een eindscore van 1,25 of 2,5 punten niet mogelijk is.

Bij de vragen 1 tot en met 10 krijg je bij elke vraag 3 punten bij een goed antwoord en $\frac{3}{4}$ strafpunt bij een fout antwoord. We weten dat de kans op een goed antwoord gelijk is aan $\frac{1}{5}$ voor een leerling die het antwoord gokt. Met behulp hiervan kan voor elk van de vragen 1 tot en met 10 de standaardafwijking van de score worden berekend.

4p **7** Bereken deze standaardafwijking.

Door een dergelijke berekening uit te voeren voor alle vragen, heeft men de standaardafwijking van de eindscore berekend. Deze is 11,18. De gemiddelde eindscore voor een leerling die alle antwoorden gokt, is 30 punten.

We kunnen de kansverdeling van de eindscores benaderen met een normale verdeling met gemiddelde 30 en standaardafwijking 11,18.

De werkelijke kansverdeling staat in de tabel op de uitwerkbijlage. We kunnen controleren of deze normale verdeling een goede benadering is van de werkelijkheid. We kijken bijvoorbeeld naar de kans om een eindscore van

hoogstens 15 punten te behalen. Om deze kans met de normale verdeling te benaderen, moeten we goed kijken naar de grenswaarden en bij het gebruik van de continuïteitscorrectie rekening houden met de mogelijke waarden van de eindscores.

5p **8** Bereken het verschil tussen de normale benadering en de werkelijke kans bij het halen van een eindscore van hoogstens 15 punten.

Kopieermachines

Het bedrijf PrintLease verhuurt twee types kopieermachines, de H570T en de H320L. De huurprijs bestaat uit twee delen, de vaste kosten en de kosten per gemaakte kopie. In tabel 2 is te zien hoe de maandelijkse huurprijs wordt berekend.

tabel 2

Maandelijkse kosten verhuur kopieermachines

kosten per maand in euro's	H570T	H320L
vaste kosten	340	375
kosten per kopie tot en met het aantal van 12 000	0,0095	0,01
voor elke kopie boven het aantal van 12 000	0,0095	0,0058

In deze tabel kun je zien dat de prijs voor elke kopie boven de 12 000 kopieën bij de H320L goedkoper is dan bij de H570T.

PrintLease wil op de website aan de klanten laten weten bij welk aantal kopieën per maand het huren van de H320L voordeliger is dan de H570T.

5p **9** Onderzoek bij welke aantallen kopieën dit het geval is.

Naast de verhuur verkoopt PrintLease ook nog elk jaar 240 kopieermachines. Men verwacht dat dit de komende jaren zo zal blijven.

Om er voor te zorgen dat het bedrijf steeds kopieermachines in voorraad heeft, doet PrintLease een aantal keren per jaar een bestelling bij de fabrikant. Om na te gaan welke kosten daarmee gemoeid zijn, hanteert PrintLease de volgende **aannames**:

- per jaar worden gemiddeld 240 kopieermachines besteld;
- per keer worden evenveel kopieermachines besteld;
- nieuwe bestellingen worden steeds precies afgeleverd als de voorraad op is;
- de verkoop van kopieermachines verloopt gelijkmatig over het jaar;
- de kosten voor het beheren van de voorraad zijn 60 euro per kopieermachine per jaar;
- elke bestelling kost 480 euro.

Bij PrintLease wil men weten of de kosten bij twee bestellingen per jaar hoger zijn dan de kosten bij vier bestellingen per jaar.

4p **10** Onderzoek met bovenstaande gegevens of dit het geval is.

De kosten per jaar K kunnen we weergeven met de volgende formule:

$$K = \frac{115200}{q} + 30q$$

In deze formule is K in euro's en is q het aantal kopieermachines dat PrintLease per keer bestelt.

4p **11** Leid deze formule af uit de aannames op de vorige bladzijde.

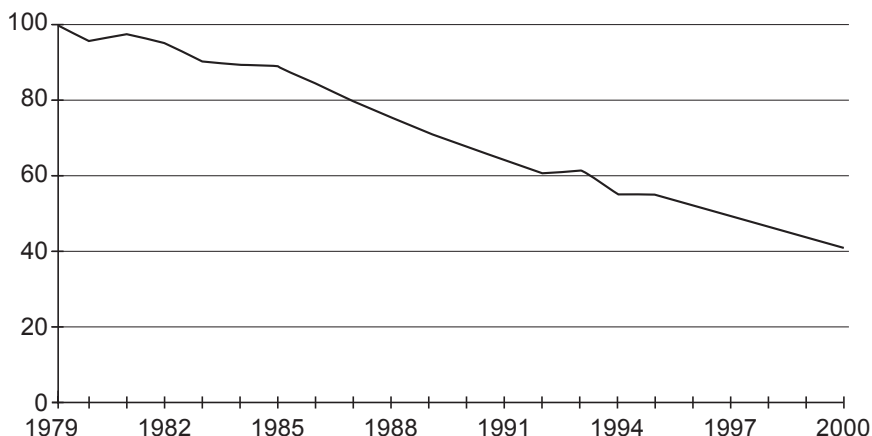
Op een gegeven moment bestelt PrintLease telkens 40 kopieermachines per keer. Iemand beweert dat PrintLease minstens 10% kan bezuinigen op de kosten die hier bij horen. PrintLease moet dan wel een andere bestelgrootte kiezen.

5p **12** Onderzoek of deze bewering juist is.

In Nederland sterven jaarlijks duizenden mannen aan een hartaanval. In figuur 2 staat een grafiek van de sterfte ten gevolge van een hartaanval.

figuur 2

Sterfte ten gevolge van een hartaanval bij mannen



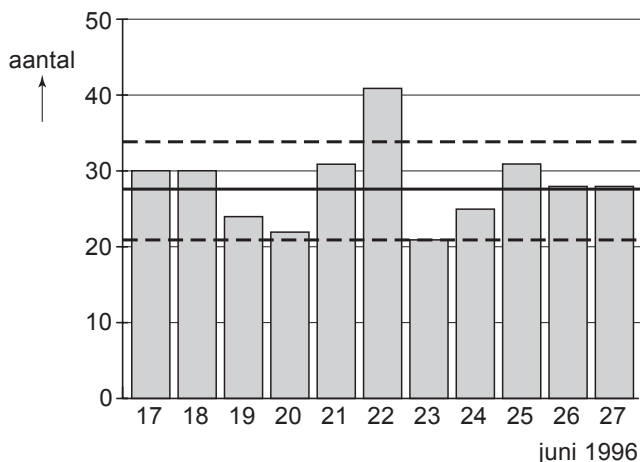
Omdat de omvang van de bevolking voortdurend verandert, geeft men de sterfte ten gevolge van een hartaanval aan met het sterftecijfer. Dat is het aantal sterfgevallen ten gevolge van een hartaanval per 100 000 personen. In 1979 was dit sterftecijfer voor mannen 203,0. De grafiek in figuur 2 is geïndexeerd ten opzichte van het sterftecijfer van 1979.

In 1995 waren in Nederland ongeveer 7,6 miljoen mannen.

- 5p **13** Laat met een berekening zien dat er in 1995 per dag gemiddeld ongeveer 23 mannen aan een hartaanval zijn overleden.

Het aantal mensen dat aan een hartaanval overlijdt, is niet elke dag even groot. In figuur 3 zie je een staafdiagram met de aantallen sterfgevallen bij mannen ten gevolge van een hartaanval in de periode van 17 tot en met 27 juni 1996.

figuur 3



Het aantal mannen dat in de zomermaanden per dag overlijdt aan een hartaanval is bij benadering normaal verdeeld met gemiddelde 27,6 en standaardafwijking 4,1.

In figuur 3 zijn de 90%-grenzen van deze verdeling met stippellijnen aangegeven. Dat betekent dat naar verwachting 90% van de staafjes een lengte heeft die tussen deze twee grenzen ligt. Deze twee grenzen liggen symmetrisch ten opzichte van het gemiddelde. In figuur 3 is te zien dat de grenzen in de buurt van 20 en 35 liggen. Met behulp van de hierboven genoemde normale benadering kun je deze twee grenzen nauwkeurig berekenen.

4p **14** Bereken deze twee grenzen in één decimaal nauwkeurig.

De periode van 17 tot en met 27 juni 1996 is interessant omdat op 22 juni 1996 een voetbalwedstrijd werd gespeeld: Nederland – Frankrijk in de kwartfinale van het Europees Kampioenschap. Die wedstrijd was tot het einde spannend. Uiteindelijk moest de beslissing vallen door middel van een serie strafschoppen. Omdat Nederland de laatste strafschop miste, verloor Nederland. Op die dag was het aantal sterfgevallen bij mannen ten gevolge van een hartaanval opvallend hoog. In figuur 3 kun je zien dat het er die dag 41 waren. Dat zijn er veel meer dan de gemiddeld 27,6 die je op een willekeurige zomerse dag mag verwachten.

5p **15** Onderzoek of dit aantal significant hoger is dan je op een willekeurige zomerse dag mag verwachten. Neem als significantieniveau 1%.

Let op: de laatste vragen van dit examen staan op de volgende pagina.

Koffers

Controle

Op luchthavens in de Verenigde Staten controleert de TSA (Transportation Security Administration) ongeveer 10% van alle koffers van vluchten die arriveren van buiten de Verenigde Staten. Hierbij worden de koffers geopend. Koffers die op slot zijn, worden opengebroken. Dat zorgt voor schade aan de koffer en vaak ook aan de bagage. De reizigers wordt dan ook aangeraden hun koffers niet op slot te doen maar dicht te maken met een kofferriem. Ondanks alle waarschuwingen heeft de TSA de ervaring dat 15% van alle koffers toch op slot is gedaan.

In een bepaalde week zijn er 68 vluchten van Nederland naar de Verenigde Staten. Op zo'n vlucht worden gemiddeld 450 koffers vervoerd. Stel dat 15% van alle koffers ondanks alle waarschuwingen toch op slot wordt gedaan.

- 4p **16** Bereken in 4 decimalen de kans dat er bij zo'n vlucht meer dan 60 maar minder dan 80 koffers op slot worden gedaan.
- 3p **17** Bereken de verwachtingswaarde van het aantal door de TSA opengebroken koffers in deze week.

Fabricage

Een leerfabriek maakt 2 typen leren koffers: de 'traveller' en de 'mondial'. Het maken van de traveller kost 2 manuren en het maken van de mondial 3 manuren. Voor de fabricage van deze koffers kan maximaal 616 manuren per week ingezet worden.

Voor elk van beide koffers is $1,5 \text{ m}^2$ leer nodig. Wekelijks is hiervoor in totaal 387 m^2 leer beschikbaar.

Het aantal travellers dat per week geproduceerd wordt, noemen we t . Het aantal mundials dat per week geproduceerd wordt, noemen we m .

Naast de beperkende voorwaarden $t \geq 0$, $m \geq 0$ met t en m geheel, zijn er nog twee beperkende voorwaarden.

- 4p **18** Leid uit de gegevens deze twee voorwaarden af.

Op de uitwerkbijlage zijn de grenslijnen bij deze twee beperkende voorwaarden getekend.

De leerfabriek maakt op de traveller € 44,- winst en op de mondial € 56,-. Voor de wekelijkse winst W geldt dan: $W = 44t + 56m$.

- 5p **19** Onderzoek met behulp van de uitwerkbijlage bij welke aantallen van de twee typen koffers de wekelijkse winst maximaal is en bereken deze winst.

In de praktijk blijkt dat er twee keer zoveel travellers als mundials worden verkocht. Bij de leerfabriek is men van plan daar op in te spelen. Dat betekent dat er elke week twee keer zoveel travellers als mundials geproduceerd zullen worden. Maar dit heeft gevolgen voor de wekelijkse winst.

- 4p **20** Onderzoek met behulp van de uitwerkbijlage hoe groot de maximale winst in dat geval zal zijn.