

Voor dit examen zijn maximaal 81 punten te behalen; het examen bestaat uit 20 vragen. Voor elk vraagnummer is aangegeven hoeveel punten met een goed antwoord behaald kunnen worden. Voor de beantwoording van de vragen 7 en 11 is een uitwerkbijlage bijgevoegd.

Als bij een vraag een verklaring, uitleg of berekening vereist is, worden aan het antwoord meestal geen punten toegekend als deze verklaring, uitleg of berekening ontbreekt.

Geef niet meer antwoorden (redenen, voorbeelden e.d.) dan er worden gevraagd. Als er bijvoorbeeld twee redenen worden gevraagd en je geeft meer dan twee redenen, dan worden alleen de eerste twee in de beoordeling meegeteld.

Zeep

De firma Sanove fabriceert stukken zeep. De stukken zeep worden machinaal gemaakt. De machine is zo ingesteld dat het gewicht van de stukken zeep normaal verdeeld is met een gemiddelde van 93 gram en een standaardafwijking van 1,4 gram.

Mevrouw Jansen koopt drie stukken zeep van Sanove.

- 4p 1 Bereken de kans dat alle drie stukken zeep minder dan 90 gram wegen.

figuur 1



Het kan gebeuren dat de machine niet goed functioneert. Dan hebben te veel stukken zeep niet het gewenste gewicht. De afdeling Quality Control (QC) van Sanove gebruikt verschillende manieren om dit te controleren. Enkele van deze manieren komen hier aan de orde.

Wanneer het gemiddelde gewicht van de stukken zeep te laag is, mag de zeep niet verkocht worden. De afdeling QC neemt daarom elk uur uit de productie van dat uur aselekt vijf stukken zeep. De productie van dat uur wordt afgekeurd wanneer het totale gewicht van de vijf stukken zeep minder is dan 460 gram.

Neem aan dat de machine in orde is, dus stukken zeep maakt waarvan het gewicht normaal verdeeld is met een gemiddelde van 93 gram en een standaardafwijking van 1,4 gram.

Dan is het toch mogelijk dat van een zeker uur de productie wordt afgekeurd.

- 5p 2 Bereken de kans dat dit gebeurt.

De machine mag niet te veel stukken zeep afleveren waarvan het gewicht te laag of te hoog is. QC maakt hierbij gebruik van de I_{3s} -regel en de 2_{2s} -regel.

Bij de I_{3s} -regel controleert QC elke dag aselekt tien stukken zeep en bepaalt daarvan het gewicht. QC laat de machine opnieuw instellen wanneer bij die tien stukken zeep er minstens één is waarvan het gewicht meer dan drie keer de standaardafwijking afwijkt van het gemiddelde.

Neem aan dat de machine in orde is, dus stukken zeep maakt waarvan het gewicht normaal verdeeld is met een gemiddelde van 93 gram en een standaardafwijking van 1,4 gram.

Dan kan het toch gebeuren dat QC op grond van de I_{3s} -regel de machine opnieuw laat instellen.

- 5p 3 Bereken de kans dat dit gebeurt.

Bij de 2_{2s} -regel wordt per dag drie keer aselekt een stuk zeep gekozen. De machine wordt opnieuw ingesteld zodra die dag twee keer *achter elkaar* het gewicht van een stuk zeep meer dan twee keer de standaardafwijking afwijkt van het gemiddelde. Als van de eerste twee gecontroleerde stukken zeep het gewicht meer dan twee keer de standaardafwijking van het gemiddelde afwijkt, vindt die dag geen derde controle plaats.

Ook nu is er een kans dat QC de machine opnieuw laat instellen terwijl de machine in orde is.

- 5p 4 Bereken deze kans.

Evenwicht

In de macro-economie geven economen met wiskundige modellen het verband aan tussen grootheden als:

Y_t = nationale inkomen op tijdstip t

C_t = consumptie op tijdstip t

I_t = investeringen op tijdstip t

Een voorbeeld is het volgende model dat bestaat uit drie vergelijkingen.

Voor $t = 1, 2, 3, \dots$ geldt:

- $Y_t = C_t + I_t$
- $C_t = 0,8 \cdot Y_{t-1} + 20$
- $I_t = 10$

Neem $Y_0 = 40$.

- 4p **5** Bereken Y_1 en Y_2 met behulp van bovenstaande formules.

We spreken van een *evenwichtsinkomen* als de waarde van Y_t niet verandert op opeenvolgende tijdstippen.

Uit de drie gegeven formules kunnen we de formule $Y_t = 0,8 \cdot Y_{t-1} + 30$ afleiden. Met behulp van deze formule kunnen we het evenwichtsinkomen berekenen.

- 3p **6** Bereken het evenwichtsinkomen met behulp van $Y_t = 0,8 \cdot Y_{t-1} + 30$.

Op de uitwerkbijlage is een assenstelsel getekend. Met een webgrafiek kunnen we grafisch duidelijk maken dat bij verschillende startwaarden Y_0 op den duur hetzelfde evenwichtsinkomen bereikt wordt.

- 5p **7** Laat dit zien in het assenstelsel op de uitwerkbijlage met een webgrafiek waarbij de startwaarde Y_0 kleiner is dan het evenwichtsinkomen. Laat in dezelfde figuur zien dat dit óók geldt met een startwaarde Y_0 die groter is dan het evenwichtsinkomen.

Bovenstaand model is een voorbeeld van een algemener model:

- $Y_t = C_t + I_t$
- $C_t = 0,8 \cdot Y_{t-1} + 20$
- $I_t = p$

Het evenwichtsinkomen hangt bij dit model af van de waarde van p .

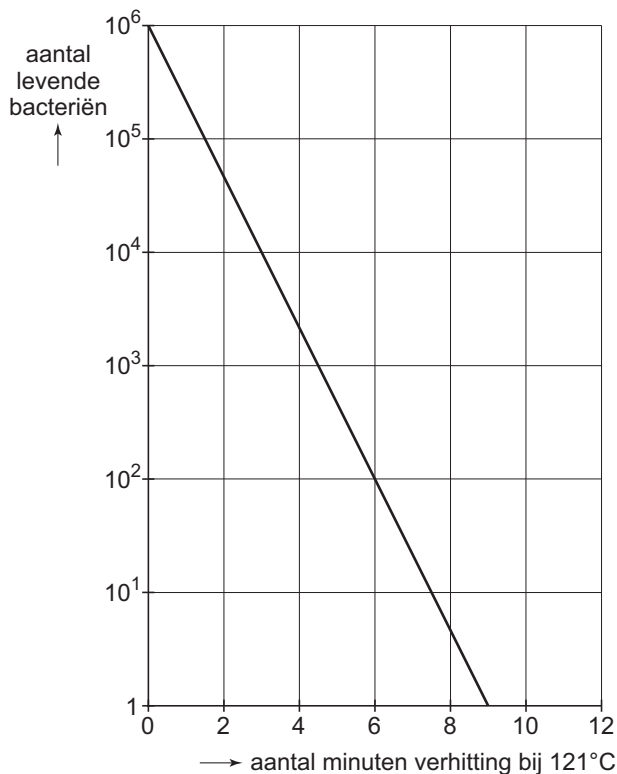
- 4p **8** Toon aan dat het evenwichtsinkomen van het nationale inkomen in dit model gelijk is aan $100 + 5p$.

Sterilisatie

Om voedingswaren tegen bederf te beschermen, worden ze tijdelijk verhit. Men noemt dit steriliseren. Er zijn verschillende sterilisatiemethoden.

In deze opgave kijken we naar het sterilisatieproces bij twee soorten bacteriën. De temperatuur bij dat proces is 121 °C. Naarmate de bacteriën korter aan deze temperatuur zijn blootgesteld, zullen er meer bacteriën overleven. In figuur 2 zie je een *overlevingsgrafiek* van de *Bacillus stearothermophilus*. Figuur 2 staat ook op de uitwerkbijlage.

figuur 2



Bij een overlevingsgrafiek heeft de verticale as altijd een logaritmische schaalverdeling. Het aantal bacteriën bij aanvang van het sterilisatieproces stelt men altijd op 1 miljoen. We gaan er steeds vanuit dat voor verschillende soorten bacteriën de overlevingsgrafieken rechte lijnen zijn indien de verticale as een logaritmische schaalverdeling heeft.

Bij de grafiek in figuur 2 hoort een formule van de vorm:

$$N_t = 10^6 \cdot 2^{-r \cdot t}$$

Hierin is N_t het aantal bacteriën na t minuten en is r de *sterftfactor*. De sterftfactor is afhankelijk van het type bacteriën.

Met behulp van figuur 2 kun je berekenen dat de sterftfactor r van de *Bacillus stearothermophilus* ongeveer gelijk is aan 2,2.

4p **9** □ Toon dat met een berekening aan.

De D -waarde is de tijd in minuten die nodig is om het aantal bacteriën te reduceren tot 10% van het oorspronkelijke aantal. Net als de sterftfactor is de D -waarde afhankelijk van de soort bacteriën.

5p **10** □ Bereken voor de *Bacillus stearothermophilus* de D -waarde met behulp van bovenstaande formule en leg uit hoe je deze D -waarde kunt controleren met behulp van figuur 2.

Men heeft ook van andere bacteriën de D -waarde bepaald. Voor de *Clostridium botulinum* is deze D -waarde gelijk aan 2,55 minuten.

Met dit gegeven kunnen we de overlevingsgrafiek van de *Clostridium botulinum* tekenen.

Ook voor deze overlevingsgrafiek beginnen we weer met 1 miljoen bacteriën.

4p **11** □ Teken deze overlevingsgrafiek in de figuur op de uitwerkbijlage. Licht je werkwijze toe.

Amerikaans Roulette

Amerikaans Roulette is een gokspel dat gespeeld kan worden in verscheidene Nederlandse casino's. Amerikaans Roulette wordt met maximaal tien spelers gespeeld, die elk hun eigen kleur speelfiches – ook chips geheten – kiezen. Er zijn 10 verschillende kleuren chips beschikbaar. De chips stellen een bepaald geldbedrag voor.

Aan een tafel wordt Amerikaans Roulette gespeeld. Er spelen al twee spelers A en B mee. A heeft rood en B heeft groen. Er zijn dus nog 8 kleuren beschikbaar. Drie nieuwe spelers kiezen één voor één een kleur om mee te kunnen spelen.

- 3p **12** □ Bereken op hoeveel manieren de drie nieuwe spelers een kleur kunnen kiezen.

De persoon die het spel leidt, de croupier, werpt een balletje in een bak met een draaiende schijf met 38 vakjes met nummers. De nummers zijn: de 0, de 00 en de oneven en even nummers 1 tot en met 36. Voor alle duidelijkheid: 0 en 00 worden hier niet als even of oneven nummer gezien. Het nummer van het vakje waarin het balletje valt, is het winnende nummer.

In de meeste gevallen zal het winnende nummer even of oneven zijn, en niet 0 of 00. De kans op even, en ook op oneven, is per spel dus iets kleiner dan 0,5. Toch is bij bijvoorbeeld 10 spellen de kans dat in precies de helft van het aantal spellen het winnende nummer even is, niet zo groot.

- 3p **13** □ Bereken de kans dat in 10 spellen het winnende nummer precies vijf keer even is.

In figuur 3 is het speelveld afgebeeld van Amerikaans Roulette. Voordat de croupier het balletje werpt, zet elke speler één of meer chips in op één van de nummers 1 tot en met 36 of op een combinatie van een aantal nummers, bijvoorbeeld op alle even nummers. Een speler kan niet inzetten op de nummers 0 en 00. Als het winnende nummer een nummer is waarop de speler heeft ingezet, dan krijgt de speler zijn inzet terug én een uitbetaling door de croupier. Zo niet, dan gaat de inzet van de speler naar het casino.

figuur 3

		0	00
1 to 18 1st. 12 EVEN	1st. 12	1	2
		3	4
		5	6
EVEN		7	8
		9	10
		11	12
2nd. 12 ODD	2nd. 12	13	14
		15	16
		17	18
ODD 3rd. 12 19 to 36	3rd. 12	19	20
		21	22
		23	24
	25	26	27
	28	29	30
	31	32	33
	34	35	36
		2 to 1	2 to 1
		2 to 1	2 to 1
		2 to 1	2 to 1

Er zijn verschillende manieren om in te zetten.

Een daarvan is 'straight up bet': de speler legt een chip op één vakje met een nummer. Hij heeft dus de keus uit de vakjes 1 tot en met 36. Wanneer het winnende nummer gelijk is aan dat nummer, is de uitbetaling door de croupier gelijk aan 35 maal de inzet.

Een andere manier om in te zetten is ‘split bet’. In dat geval legt een speler een chip op twee vakjes tegelijk, bijvoorbeeld 10 en 11, of 23 en 26. Zie figuur 4. Wanneer het winnende nummer gelijk is aan een van deze nummers, is de uitbetaling door de croupier 17 maal de inzet.

figuur 4



Bij het casino vraagt men zich af of het voor de winst van het casino uitmaakt of een speler inzet op ‘straight up bet’ of op ‘split bet’. We kunnen dit onderzoeken door zowel bij ‘straight up bet’ als bij ‘split bet’ de winstverwachting voor het casino uit te rekenen wanneer een speler 1000 dollar inzet.

4p **14** □ Voer dit onderzoek uit.

Wanneer een speler inzet op een ‘straight up bet’ van een van de nummers 1 tot en met 36, kan hij kiezen uit drie kolommen. Zie figuur 3. Je kunt dus verwachten dat ongeveer $\frac{1}{3}$ van de spelers zal kiezen voor een nummer uit de middelste kolom, dus een van de nummers 2, 5, 8, ... 35.

Op een website over Amerikaans Roulette staat dat spelers bij voorkeur kiezen voor een nummer uit de middelste kolom. Een casino-eigenaar is van mening dat dit in zijn casino ook het geval is. Van 100 verschillende spelers die op een gegeven moment inzetten op een ‘straight up bet’ registreert hij voor welke kolom ze kiezen. Uit het onderzoek blijkt dat 42 spelers hebben gekozen voor een nummer uit de middelste kolom, 28 spelers een nummer uit de linkerkolom en 30 spelers een nummer uit de rechterkolom.

6p **15** □ Onderzoek of op grond hiervan de mening van de casino-eigenaar gerechtvaardigd is. Neem een significantieniveau van 5%.

Snelheden

In september 2003 won de Keniaan Rono een hardloopwedstrijd over een afstand van 2000 meter. Hij liep deze afstand in 4 minuten en 57,76 seconden. Dat betekent dat Rono die afstand liep met een gemiddelde snelheid van ongeveer 24,18 km/uur. Het is gebruikelijk om tijden als 4 minuten en 57,76 seconden te noteren als 4:57.76.

Met deze prestatie behaalde Rono geen wereldrecord. Dat stond op dat moment op naam van de Marokkaan El Guerrouj. Zijn recordtijd op de 2000 meter was 4:44.79.

- 3p **16** Bereken de gemiddelde snelheid in km/uur waarmee El Guerrouj dit wereldrecord liep. Geef het antwoord in twee decimalen nauwkeurig.

In tabel 1 staan de wereldrecords hardlopen bij de mannen tot en met september 2003 op een aantal afstanden.

tabel 1

Afstand (in meters)	Tijd	Gemiddelde snelheid (in km/uur)
100	9.78	36,8
200	19.32	37,3
400	43.18	33,3
800	1:41.11	28,5
1000	2:11.96	27,3
1500	3:26.00	26,2
2000	4:44.79	25,3
3000	7:20.67	24,5
5000	12:39.36	23,7
10 000	26:22.75	22,7

In de tabel zie je bijvoorbeeld dat het wereldrecord op de 1000 meter 2:11.96 was. Afgerond op één decimaal was daarbij de gemiddelde snelheid 27,3 km/uur.

Het verband tussen de afstanden en de gemiddelde snelheden uit tabel 1 kunnen we benaderen met de volgende formule:

$$v = \frac{200 \cdot a}{(44 \cdot a^2 + 1)} - 0,07 \cdot a + 23$$

In deze formule is v de gemiddelde snelheid in km/uur en a de afstand in *kilometer*.

Met de formule kun je bij elke afstand boven de 100 meter de gemiddelde snelheid berekenen die hoort bij het denkbeeldig gelopen wereldrecord. Voor bijvoorbeeld een afstand van 2283 meter zou het wereldrecord met een gemiddelde snelheid van 24,82 km/uur zijn gelopen.

- 3p **17** Bereken op welke afstand het denkbeeldige wereldrecord een gemiddelde snelheid van precies 30 km/uur op zou leveren.

In tabel 1 is de gemiddelde snelheid het hoogst bij de 200 meter. De formule van v is niet maximaal bij de 200 meter, maar bij een afstand tussen 100 en 200 meter.

- 3p **18** Bereken in meters nauwkeurig bij welke afstand de gemiddelde snelheid zo groot mogelijk is volgens de formule van v .

Bij afstanden boven de 200 meter is de grafiek van v dalend. Dat is bijvoorbeeld ook het geval bij een afstand van 1500 meter, dus voor $a = 1,5$.

- 4p **19** Stel een formule op voor de afgeleide van v en laat met behulp daarvan zien dat de grafiek van v dalend is bij een afstand van 1500 meter.

De formule van v is gebaseerd op wereldrecords die gelopen zijn op afstanden tot 10 km. Het is maar de vraag of de formule ook een goede benadering geeft van de gemiddelde snelheid op een lange afstand zoals de marathon. Bij de marathon wordt een afstand van 42,195 km gelopen.

In 2003 was de Keniaan Tergat wereldrecordhouder op de marathon met een tijd van 2 uur, 4 minuten en 55 seconden. Deze tijd wijkt af van de tijd die hij nodig zou hebben wanneer hij de marathon zou lopen met een gemiddelde snelheid volgens de formule van v .

4p **20** Bereken deze afwijking in seconden nauwkeurig.

Einde